

Γραμμική Άλγεβρα 1 - Τεστ Νο 3

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

**Θέμα 1 (30 Μόρια)**

Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Για τις διάφορες τιμές του  $k \in \mathbb{R}$

(i) (10 Μόρια) να βρεθεί η ισχυρά (ή ανηγμένη) γ-κλιμακωτή μορφή  $\Gamma(A)$  του πίνακα  $A$ .

(ii) (5 Μόρια) να βρεθεί η βαθμίδα του πίνακα  $A$ .

(iii) (15 Μόρια) να επιλύσετε το γραμμικό σύστημα  $Ax = b$ , αν είναι γνωστό ότι  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{pmatrix}$ .

**Θέμα 2 (20 Μόρια)**

Να δειχθεί ότι το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ay + az = -3 \\ 2x + y + bz = a + 1 \end{cases}$$

είναι

(i) (5 Μόρια) ασυμβίβαστο για κάθε  $b \in \mathbb{R}$  και  $a = 1$

(ii) (15 Μόρια) συμβίβαστο για δύο τιμές του  $a \in \mathbb{R}$  και  $b = 1$  και για αυτές τις ειδικές τιμές του  $a$ , να περιγραφεί αναλυτικά η μορφή του συνόλου λύσεων του συστήματος.

**Θέμα 3 (30 Μόρια)**

Να υπολογίσετε τις ορίζουσες των πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2022 \times 2022} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 \\ e & f & 0 & 0 & 0 \\ g & h & k & m & 7 \\ n & p & q & r & 0 \end{pmatrix}_{5 \times 5}.$$

**Θέμα 4 (20 Μόρια)**

Να βρεθούν οι τιμές των  $a, b \in \mathbb{R}$  για τις οποίες το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b, \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**